Δέκατο Πέμπτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) + y(t) = H_3(t),\ y(0) = 2$$

όπου $H_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

(i) Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών αρχικά με την μέθοδο του πολ/κού παράγοντα και στη συνέχεια με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

(ii) Αποφανθείτε κατά πόσο η συνάρτηση y που βρήκατε στο ερώτημα (i) είναι ή όχι λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών και συνεπώς αν το παραπάνω π.α.τ έχει λύση που να ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

(iii) Υπάρχει λύση του εν λόγω π.α.τ η οποία να ορίζεται στο $(-\infty, 3]$;

Θέμα 2

(i) Να υπολογίσετε τη συνέλιξη των συναρτήσεων $f(t) = g(t) = \cos t,\ t \geq 0$.

(ii) Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]$$

(iii) Να λυθεί ως προς y η ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\sin(t-x)dx.$$

Θέμα 3

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e^{-t}H(t),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

όπου $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Heaviside. Να επιλύσετε το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών με την μέθοδο του μετασχηματισού Laplace. Είναι η λύση που προκύπτει φραγμένη ή συγκλίνουσα στο $[0, +\infty)$;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ